Катедра за управљање системима

ТЕОРИЈА СИСТЕМА

Предавање 6: Модел у простору стања, преносна функција и линеаризација

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF ORGANIZATIONAL SCIENCES

План предавања 2018/2019

1. Увод и историјски развој теорије система
2. Основни појмови - систем, модел система, улаз и излаз
3. Врсте сигнала, дискретизација и теорема одабирања
4. Улазно-излазни опис, одзив система и преносна функција
5. Стање, особина сагласности стања и аналогни модел
6. **Модел у простору стања, преносна функција и линеаризација**
7. Преносна функција сложених система и Мејсоново правило
8. Матрица прелаза стања и фундаментална матрица, управљивост, достижљивост и осмотривост
9. Управљива, осмотрива и Јорданова канонична форма
10. Управљивост и осмотривост стационарних и нестационарних континуалних система
11. ОУОИ стабилност
12. Асимптотска стабилност, стабилност у смислу Љапунова

Да се подсетимо...

У/И опис – временски домен *t*

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

У/И опис – комплексни домен *S*

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{N_m(s)}{D_n(s)}$$

Опис у простору стања – временски домен *t*

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), u(t)\right)$$

$$y(t) = \eta\left(t, x(t), u(t)\right)$$

Модел у простору стања и преносна функција – континуални системи

Модел у простору стања – општи облик

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), u(t)\right)$$

$$y(t) = \eta\left(t, x(t), u(t)\right)$$

Модел у простору стања – линеарни (матрични) облик

$$\dot{x}(t) = F(t) \cdot x(t) + G(t) \cdot u(t)$$

$$y(t) = H(t) \cdot x(t) + D(t) \cdot u(t)$$

Модел у простору стања и преносна функција – континуални системи

Модел у простору стања – линеарни и стационарни

$$\dot{x}(t) = F \cdot x(t) + G \cdot u(t)$$

$$y(t) = H \cdot x(t) + D \cdot u(t)$$

Преносна функција – линеарни и стационарни

$$G(s) = H \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot G + D$$

Модел у простору стања и преносна функција – дискретни системи

Модел у простору стања – општи облик

$$x(n+1) = f\left(n, x(n), u(n)\right)$$

$$y(n) = \eta\left(n, x(n), u(n)\right)$$

Модел у простору стања – линеарни (матрични) облик

$$x(n+1) = F(n)\cdot x(n) + G(n)\cdot u(n)$$

$$y(n) = H(n)\cdot x(n) + D(n)\cdot u(n)$$

Модел у простору стања и преносна функција – дискретни системи

Модел у простору стања – линеарни и стационарни

$$x(n+1) = F \cdot x(n) + G \cdot u(n)$$

$$y(n) = H \cdot x(n) + D \cdot u(n)$$

Преносна функција – линеарни и стационарни

$$G(z) = H \cdot (z \cdot I - F)^{-1} \cdot G + D$$

Примена MATLAB-а за трансформацију модела

Континуални систем представљен је следећом диференцијалном једначином:

$$\ddot{y}(t)+5\dot{y}(t)+6y(t)=\dot{u}(t)+u(t)$$

Коришћењем MATLAB-а одредити:

а) Преносну функцију система.

б) Импулсни одзив система.

в) Превести преносну функцију у модел у простору стања.

MATLAB – трансформација преносне функције у модел у простору стања

Континуални систем представљен је следећом преносном функцијом:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2 + 5s + 6}$$

Коришћењем MATLAB-а превести:

а) Преносну функцију у модел у простору стања.

```
tf2ss(num,den)
```

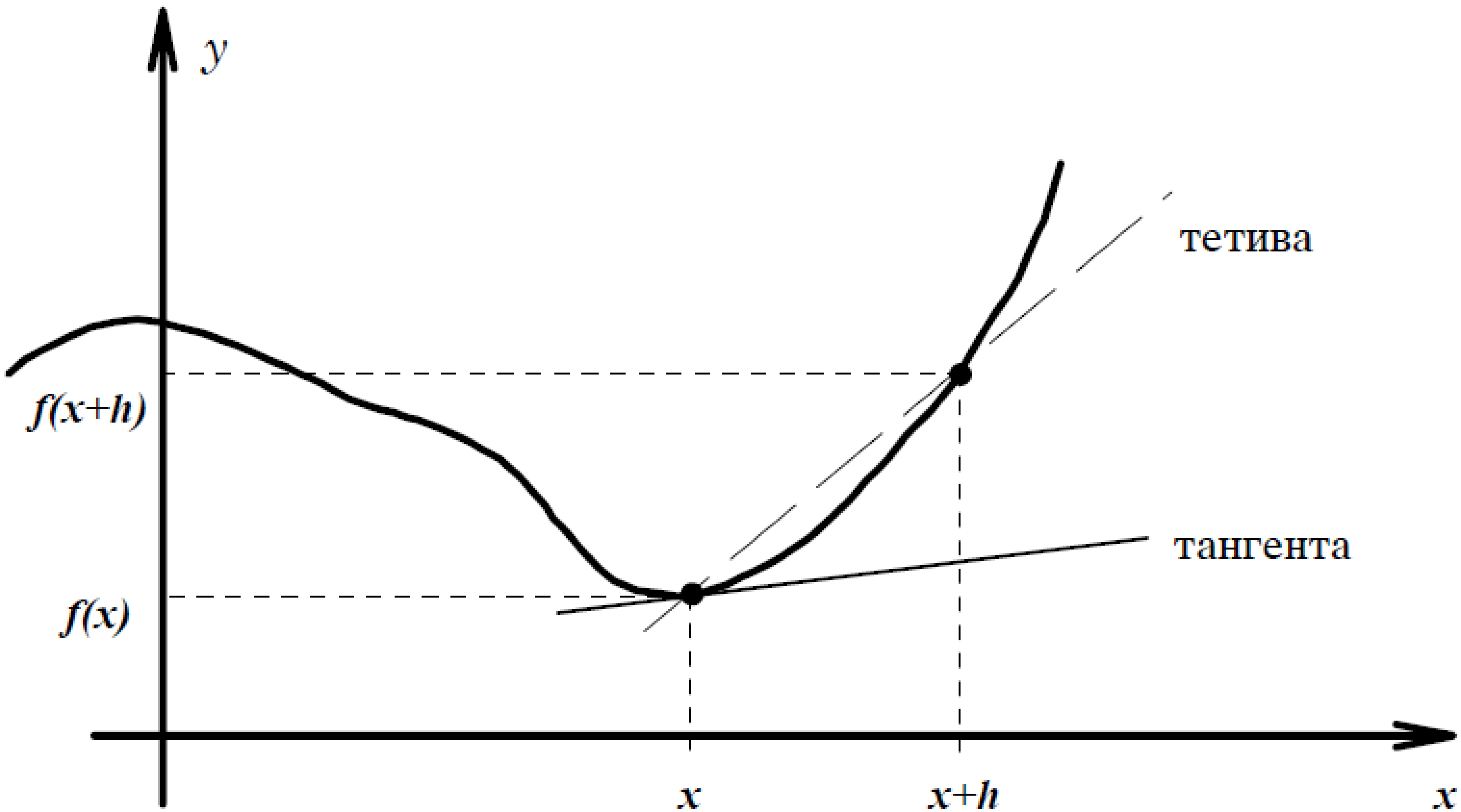
б) Модел из простора стања у преносну функцију.

```
ss2tf(F,G,H,D)
```

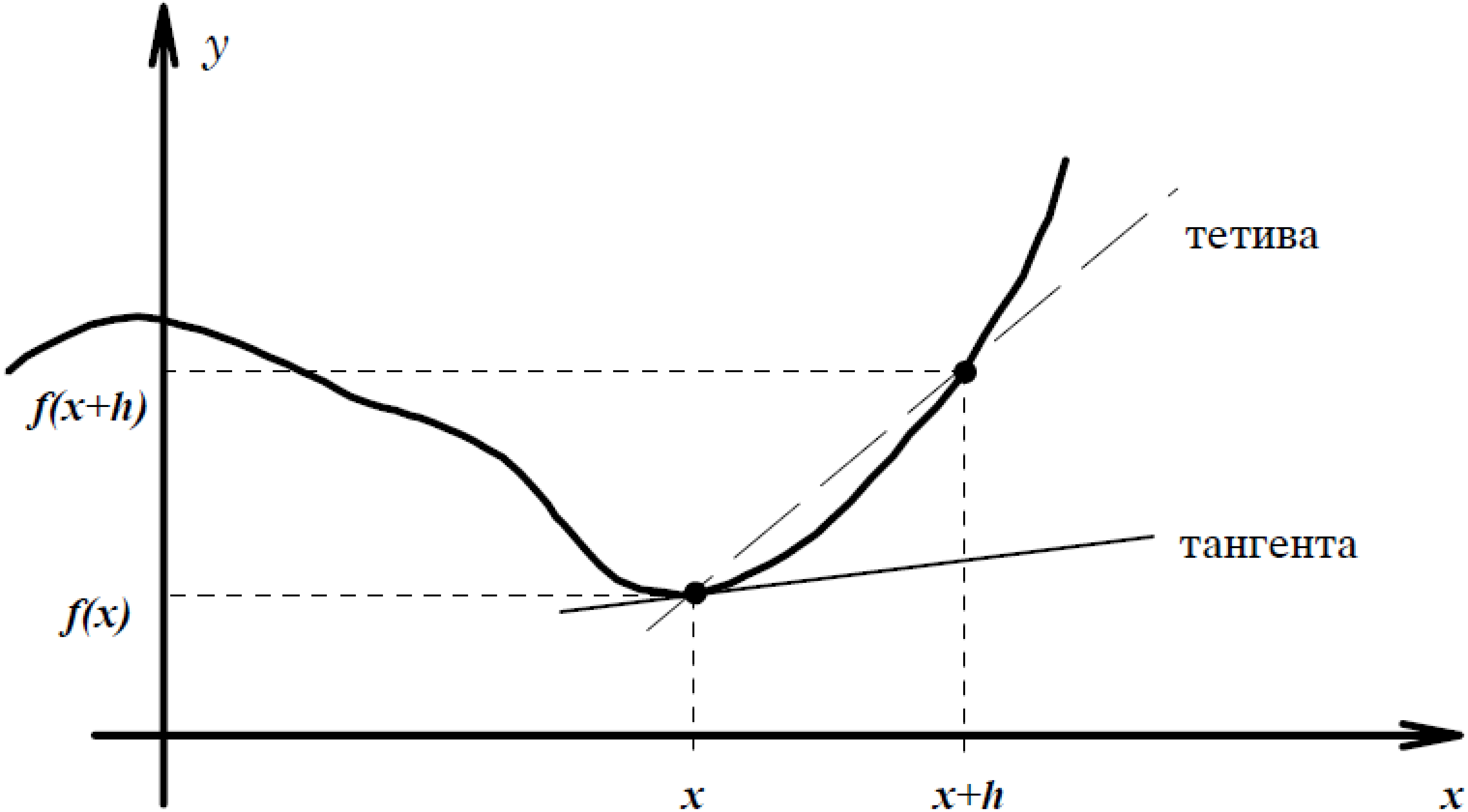
в) Преносну функцију у њен факторизован облик (нуле-полови).

```
tf2zp(num,den)
```

Линеаризација и апроксимација система



Линеаризација и апроксимација система



$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \psi(h)$$

Нелинерни динамички систем вишег реда

У складу са разлозима за линеаризацију, за временски непрекидан и временски инваријантан систем са простором улаза $U = \mathbf{R}^m$, простором стања $X = \mathbf{R}^n$ и простором излаза $Y = \mathbf{R}^p$ који је описан са $(n+p)$ једначина

$$\dot{x} = f(x,u) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m) \end{cases}$$

$$y = \eta(x) \quad \begin{cases} y_1 = \eta_1(x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ y_p = \eta_p(x_1,\ldots,x_n) \end{cases}$$

и за који је по претпоставци $f(0,0) = 0, \eta(0) = 0$ одредићемо линеаран систем, тачније линеаризован модел система.

Нелинерни динамички систем вишег реда

Да би развили ове једначине у околини $x = 0, u = 0$ послужићемо се развојем функције у Тејлоров (Taylor) ред

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(0,0) + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} x_1 + \cdots + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} x_n + \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} u_1 + \cdots + \dfrac{\partial f_1}{\partial u_m} u_m + O_1(\|x\|, \|u\|) \\ \quad \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(0,0) + \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} x_1 + \cdots + \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} x_n + \dfrac{\partial f_n}{\partial u_1} u_1 + \cdots + \dfrac{\partial f_n}{\partial u_m} u_m + O_n(\|x\|, \|u\|) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \eta_1(0) + \dfrac{\partial \eta_1}{\partial x_1} x_1 + \cdots + \dfrac{\partial \eta_1}{\partial x_n} x_n + O_1(\|x\|) \\ \quad \vdots \\ y_p = \eta_p(0) + \dfrac{\partial \eta_p}{\partial x_1} x_1 + \cdots + \dfrac{\partial \eta_p}{\partial x_n} x_n + O_p(\|x\|) \end{cases}$$

Линеаризован систем вишег реда

$$\dot{x} = F\,x + G\,u + O(\|x\|,\|u\|)$$
$$y = H\,x + O(\|x\|)$$

при чему су елементи матрица F, G, и H одређене парцијалним изводима:

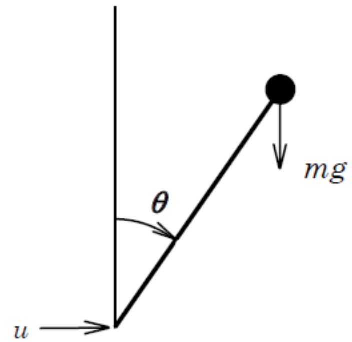
$$F = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x^0,u^0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(x^0,u^0)} \qquad G = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x^0,u^0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{(x^0,u^0)}$$

$$H = \left.\frac{\partial \eta}{\partial x}\right|_{x^0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \eta_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \eta_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \eta_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x^0}$$

Парцијални изводи од f се израчунавају у $\left(x^0,u^0\right)=(0,0)$, а парцијални изводи од η израчунавају се у $x^0 = 0$.

Пример линеаризације нелинеарног система

Претпоставимо да покушавамо да на прсту руке држимо усправно штап масе $m=1$ делујући хоризонталном силом u на једном његовом крају:



Сматрајући да је маса штапа концентрисана у материјалној тачци на његовом крају и да се штап помера само у вертикалној равни, уз одговарајући избор физичких јединица, на основу Њутнових закона је

$$\ddot{\theta} = \sin\theta - u\cos\theta$$

где је θ угао одклона штапа од вертикале. Усвајајући за променљиве стања $x_1 = \theta$ и $x_2 = \dot{\theta}$, модел у простору стања

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), u(t)\right) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ \sin x_1(t) - u\cos x_1(t) \end{bmatrix}$$

Пример линеаризације нелинеарног система

У околини равнотежне тачке $x_1^0(t)=0$, $x_2^0(t)=0, u^0(t)=0$ линеаризовани модел система је

$$\dot{x} = F\,x + G\,u$$

где су

$$F=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x^0,u^0)}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{(x^0,u^0)}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \cos x_1+u\sin x_1 & 0\end{bmatrix}_{(0,0)}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$G=\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x^0,u^0)}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1}\end{bmatrix}_{(x^0,u^0)}=\begin{bmatrix}0\\ -\cos x_1\end{bmatrix}_{(0,0)}=\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}$$

Приметимо да је $x_1=x_1^0+\Delta x_1=\Delta x_1$, $x_2=x_2^0+\Delta x_2=\Delta x_2$ и $u=u^0+\Delta u=\Delta u$ јер је $x_1^0(t)=0$, $x_2^0(t)=0$ и $u^0(t)=0$.

Пример линеаризације нелинеарног система

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 \cdot \sin x_2 + x_2 \cdot u$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 \cdot e^{-x_2} + u^2$$

$$y = 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2$$