Катедра за управљање системима

ТЕОРИЈА СИСТЕМА

Предавање 4: Улазно-излазни опис, одзив система и преносна функција

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF ORGANIZATIONAL SCIENCES

План предавања 2018/2019

1. Увод и историјски развој теорије система
2. Основни појмови - систем, модел система, улаз и излаз
3. Врсте сигнала, дискретизација и теорема одабирања
4. **Улазно-излазни опис, одзив система и преносна функција**
5. Стање, особина сагласности стања и аналогни модел
6. Модел у простору стања, преносна функција и линеаризација
7. Преносна функција сложених система и Мејсоново правило
8. Матрица прелаза стања и фундаментална матрица, управљивост, достижљивост и осмотривост
9. Управљива, осмотрива и Јорданова канонична форма
10. Управљивост и осмотривост стационарних и нестационарних континуалних система
11. ОУОИ стабилност
12. Асимптотска стабилност, стабилност у смислу Љапунова

Да се подсетимо...

- Теорема одабирања (енг. *Sampling Theorem*)
- Пример у MATLAB-у

Математички опис система

- Према опису система разликујемо:
  - **Улазно-излазни (У/И)** или екстерни опис система – сматра се непотпуним описом
  - **Опис у простору стања (У/С/И)** или интерни опис система – сматра се потпуним описом

У/И опис система

Улаз = побуда = узрок
Излаз = одзив = последица

- Уколико систем има само један улаз и један излаз онда га називамо једноваријабилан систем (**SISO**).
- За систем кажемо да је мултиваријабилан акко има више од једног улаза и/или више од једног излаза (**MIMO**).
- Математичка нотација.

Преносна функција – Лапласова трансформација диференцијалне једначине

Посматрамо систем са једним улазом и једним излазом (SISO) који је представљен линеарном диференцијалном једначином *n*-тог реда:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t)$$
$$= b_m\frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1\frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

где је $n \geq m$.

Претпоставка је да су коефицијенти константни што указује да је посматрани модел система временски инваријантан.

Такође за систем који је релаксиран (нема енергије) важе нулти почетни услови:

$$y(t_0) = 0,\ \frac{dy(t_0)}{dt} = 0,\ \ldots,\ \frac{d^{n-1}y(t_0)}{dt^{n-1}} = 0$$

Преносна функција – Лапласова трансформација диференцијалне једначине

Због нултих почетних услова се применом Лапласове трансформације једноставно добија следећи облик:

$$\begin{aligned}(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)Y(s)\\ = (b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0)U(s)\end{aligned}$$

Одавде је преносна функција система:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{N_m(s)}{D_n(s)}$$

где је степен бројиоца m мањи или једнак степену имениоца *n* што је услов за физички остваривe системе.

Преносна функција – Z трансформација диферентне једначине

Слично се и код дискретних система преносна функција може добити Z трансформацијом диферентне једначине која описује систем:

$$
\begin{aligned}
&y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \cdots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) \\
&= b_m u(k+m) + b_{m-1}u(k+m-1) + \cdots + b_1 u(k+1) + b_0 u(k)
\end{aligned}
$$

Тако добијамо дискретну преносну функцију у следећем облику:

$$
G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \frac{N_m(z)}{D_n(z)}
$$

Полиноми у бројиоцу и имениоцу имају реалне коефицијенте и да би систем био физички остварив односно каузалан мора да је испуњен услов да је $m \leq n$.

Веза између преносне функције и импулсног одзива система

Преносна функција система носи информацију о импулсном одзиву система. У општем случају имамо да је:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

$$Y(z) = G(z) \cdot U(z)$$

Ако је на улазу делта функција $\left(U(s)=1, U(z)=1\right)$ добијамо да је:

$$Y_{impulse}(s) = G(s), \quad Y_{impulse}(z) = G(z)$$

А у временском домену је:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y_{impulse}(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\right\}$$

$$g(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{Y_{impulse}(z)\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{G(z)\right\}$$

Импулсни одзив система се једноставно добија налажењем инверзне (Лапласове/Z) трансформације одговарајуће преносне функције система.

Веза између преносне функције и импулсног одзива система

Преносна функција за мултиваријабилне (MIMO) системе повезује вектор улаза и вектор излаза система у фреквентном домену под претпоставком да су сви почетни услови нула:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s) \cdot \mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{G}(z) \cdot \mathbf{U}(z)$$

где је матрица преносне функције димензија *p* x *r*, број улаза је *r*, а број излаза *p*. Вектор улаза **U** је димензија *r* x 1, а вектор излаза **Y** *p* x 1.

$$G^{p\times r}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \cdots & G_{1r}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{p1}(s) & \cdots & G_{pr}(s) \end{bmatrix}$$

$G_{ij}(s)$ повезује *j*-ти улаз и *i*-ти излаз, када су сви улази нула, осим j-тог улаза.

$$G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)\Big|_{\text{сви улази сем j-тог су 0}}}$$

MATLAB – одзив система у конт. времену

Континуални систем представљен је следећом преносном функцијом: $G(s)=\dfrac{s+1}{s^2+5s+6}$

Коришћењем MATLAB-а (*Control System Toolbox*) одредити:

а) Импулсни одзив система.

```
t=0:0.1:5; impulse(num,den,t)
```

б) Одзив система на јединичну одскочну функцију на улазу.

```
t=0:0.1:5; step(num,den,t)
```

в) Одзив система на `sin(2t)` функцију на улазу.

```
t=0:0.2:20; u=sin(2*t); lsim(num,den,u,t)
```

г) Одзив система на `exp(-t)` функцију на улазу.

```
t=0:0.1:5; u=exp(-t); lsim(num,den,u,t)
```

MATLAB – одзив система у дискр. времену

Дискретан систем представљен је следећом преносном функцијом: $G(z)=\dfrac{z-2}{z^2-2.5z+1}$

Коришћењем MATLAB-а (*Control System Toolbox*) одредити:

а) Импулсни одзив система.

```
dimpulse(num,den), axis([0 10 0 1.5])
```

б) Одзив система на јединичну одскочну функцију на улазу.

```
dstep(num,den), axis([0 10 0 3])
```

в) Одзив система на `sin(2k)` функцију на улазу.

```
k=0:1:50; u=sin(2*k); dlsim(num,den,u)
```